

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
21 februarie 2016

CLASA a IX-a

1. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, dacă

$$f(1) - 2f(2) + 3f(3) - 4f(4) + \dots + (-1)^{n-1}nf(n) = \frac{(-1)^{n-1}nf(n+1)}{2},$$

pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Rezolvați ecuația: $\left\{x + \frac{1}{2n}\right\} + \left\{x + \frac{3}{2n}\right\} + \dots + \left\{x + \frac{2n-1}{2n}\right\} = \frac{n(2x-1)}{2}$.

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir strict crescător de numere reale. Să se arate că dacă pentru orice număr natural $k \geq 3$, mulțimea $A_k = \{a_j - a_i \mid 1 \leq i < j \leq k\}$ are $k-1$ elemente, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică.

4. Fie triunghiul ABC și punctele R, P, N, Q cu proprietatea că $\overrightarrow{RB} = 3\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CQ}$, $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{NC}$. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$ și T este simetricul lui M față de N , demonstrați că dreptele RQ , PT și AC sunt concurente.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.